Тема: Графический способ решения систем уравнений

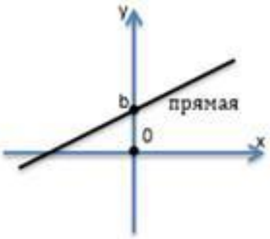
Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение в верное равенство.

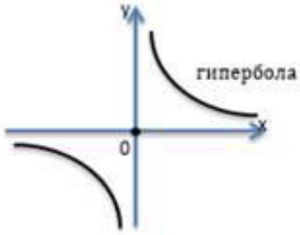
Графики уравнений с двумя переменными весьма разнообразны.

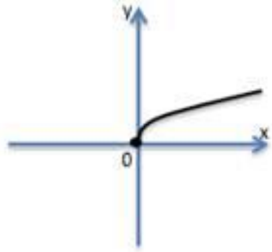
Например:

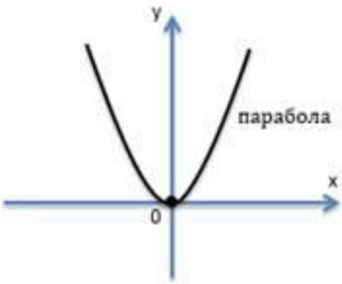
1. 2x + 3y = 6, $y = -\frac{2}{3}x + 3$ - прямая
2. xy = 5, $y = \frac{5}{x}$ - гипербола
3. y = -x^2 + 2x +2 – парабола
4. x^2 + y^2 = 4 – окружность, центр (0;0), радиус – 2

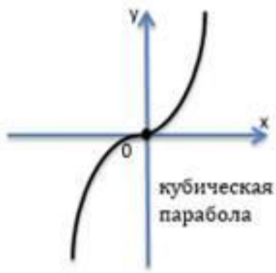
Графиками таких уравнений могут являться различные линии.











Решить систему - значит найти все её решения или доказать, что их нет.

Определение:

Решением системы называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы уравнений с двумя переменными в верное равенство.

Пример.

Нужно проверить, обращают ли пара значений уравнения системы в верные равенства.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 6x + 5y = -4 \end{cases}$$

1. Первая пара (-2, 1). Подставим их в систему:

$$\begin{cases}(-2)^2+1^2=5\\6(-2)+5\cdot1=-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}4+1=5\\-12+5=-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}5=5\\-7=-4\end{cases}$$

Первое уравнение обратилось в верное равенство, а второе - нет. Значит, пара чисел (-2;1) не является решением данной системы.

2. Вторая пара (1;-2). Поставим эти значения в систему:

$$\begin{cases}(1)^2+(-2)^2=5\\6(1)+5\cdot(-2)=-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+4=5\\6-10=-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}5=5\\-4=-4\end{cases}$$

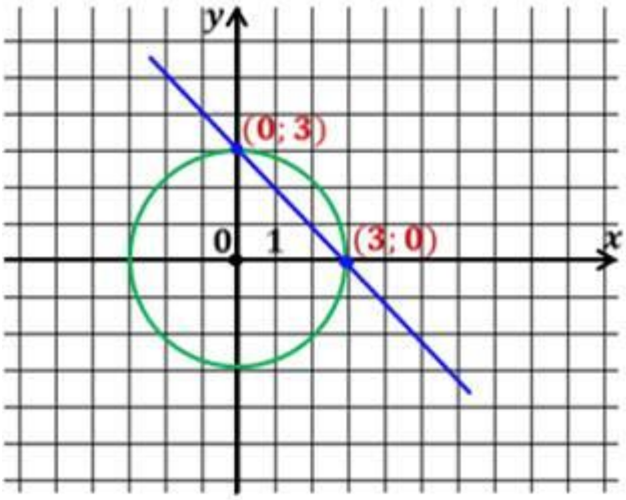
Получаем два верных равенства. Значит, пара чисел (1;-2) является решением данной системы.

Пример.

Решить систему двух уравнений:

$$\begin{cases}y+x-3=0\\x^2+y^2=9\end{cases}$$

Изобразим график системы:



Видим, что графики пересеклись в двух точках. Их координаты и являются решением системы. Данная система имеет два решения: (0;3) и (3;0).

Проверим, действительно ли они являются решениями. Подставим эти значения в систему:

$$\begin{cases} 3+0-3=0 \\ 0^2+3^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 9=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0+3-3=0 \\ 3^2+0^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 9=9 \end{cases}$$

Проверка необходима потому, что графический метод позволяет получить приближённые значения. Иногда их сложно указать точно.

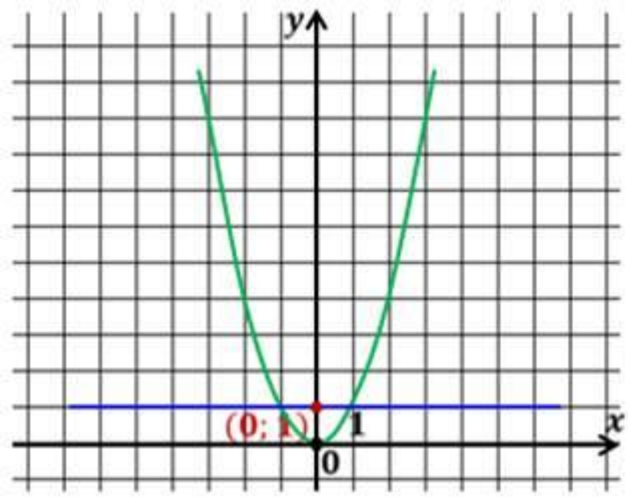
Получили две пары значений: (0;3) и (3;0).

Пример.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=1 \end{cases}$$

Изобразим график системы:



Точку пересечения этих графиков имеет координаты (0;1). Подставим значения в систему:

$$\begin{cases} 1 = 0^2 + 1 \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

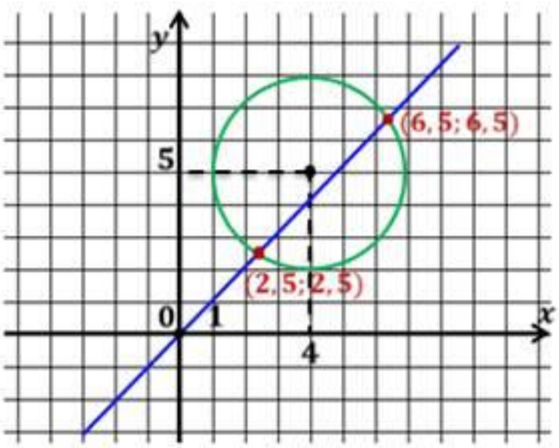
Получили верные равенства. Значит, решением данной системы является пара чисел (0;1).

Пример.

Решить систему двух уравнений:

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-5)^2 = 9 \\ y = x \end{cases}$$

Изобразим график системы:



Видим две точки пересечения. Их координаты трудно указать точно. Поэтому прежде чем записать ответ, полученные значения нужно подставить в систему:

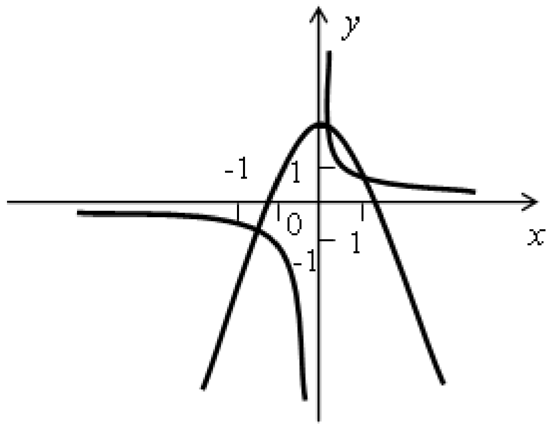
$$\begin{cases}(2{,}5-4)^2+(2{,}5-5)^2=9\\ 2{,}5=2{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8{,}5\neq 9\\ 2{,}5=2{,}5\end{cases}$$

$$\begin{cases}(6{,}5-4)^2+(6{,}5-5)^2=9\\ 6{,}5=6{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8{,}5\neq 9\\ 6{,}5=6{,}5\end{cases}$$

Решением системы будут две пары чисел(2,5;2,5) и (6,5;6,5).

2. На рисунке изображены графики функций $y = -x^2 + 2$ и $y = \frac{1}{x}$. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}y=-x^2+2,\\ xy=1.\end{cases}$$



3. Постройте график функции $y = x^2 - 4$. С помощью этого графика решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}y=x^2-4,\\ y=x+2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}y+4=x^2,\\ y+8=x.\end{cases}$

Графический способ решения систем уравнений.

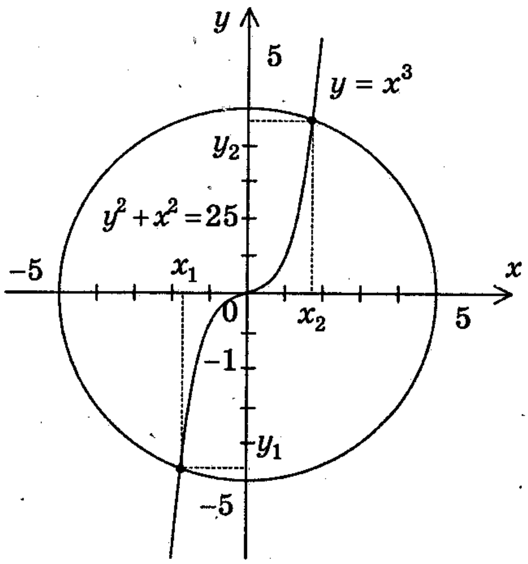
Для решения системы уравнений этим способом надо:

- каждое уравнение записать в виде формулы функции (*y* выразить через *x);*
- построить графики полученных функций;
- найти точки пересечения графиков функций;
- найти решение системы уравнений (координаты точек пересечения графиков функций).

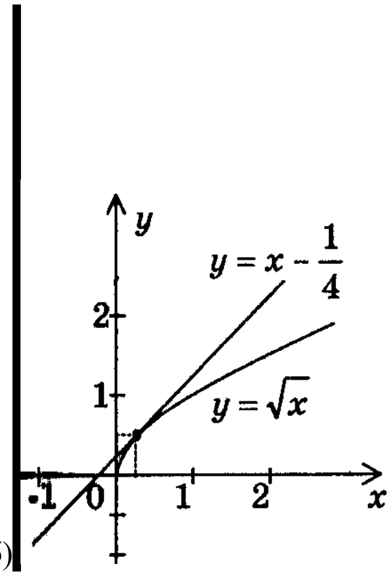
Замечание. В общем случае ответ надо давать приблизительно $(\approx)$; только если при построении графиков какая-то точка была рассчитана дважды, в ответ можно взять точные значения её координат (в таблицах такую точку обычно обводят).

Решим системы уравнений:

а) $\begin{cases}\mathrm{y}-\mathrm{x}^3=0,\\ \mathrm{x}^2+y^2=25;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\mathrm{y}=\sqrt{x},\\ \mathrm{x}-y=-0{,}25.\end{cases}$



а)



б)

Ответ: $x_1 \approx -1{,}7,\ y_1 \approx -4{,}7$;

$x_1 \approx 1{,}7,\ y_1 \approx 4{,}7$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$.

Ответить на вопросы:

– Что называется решением системы уравнений?

– В чем состоит суть графического способа решения системы уравнений?

– Может ли система уравнений не иметь решений?

– В каком случае система уравнений не будет иметь решений?

Выполнить тест

1. Какая из перечисленных пар чисел является решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y^2 = 3. \end{cases}$$

а) (1; 4) б) (4; 1) в) (- 1; 4) г) (-4; 1)

2. Из каких уравнений можно составить систему уравнений, решением которой будет данная пара чисел (1; 0).

а) $xy = 4$ б) $5x + y = 8$ в) $4x + y = 4$ г) $x^2 + y^2 = 1$

3. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x^2 \end{cases}$$

а) одно б) два в) три г) четыре

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 12 \end{cases}$$

а) (2; 6) б) (6; 2) в) (2; 6) и (6; 2) г) (-2; -6) и (-6; -2).