

Преобразование алгебраических выражений

Решение задач на преобразование выражений предполагает, как правило, последовательное упрощение данных выражений. При этом используются свойства степеней и формулы сокращённого умножения:

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$;
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Упрощение выражений обычно сводится к приведению подобных слагаемых и сокращению дробей после некоторых предварительных действий, важнейшим из которых является разложение на множители. Последнее, в свою очередь, заключается в выполнении одного или нескольких из следующих четырёх правил:

- 1) «примени формулу или свойство»;
- 2) «сгруппируй слагаемые»;
- 3) «вынеси за скобки»;
- 4) «добавь и вычти».

Пример 1. Найдите значение выражения

$$(5x - 8)(5x + 8) - 25x^2 + 4x + 54 \text{ при } x = 20;3:$$

Решение.

Сначала упростим данное выражение, применив формулу разности квадратов и приведя подобные слагаемые:

$$(5x - 8)(5x + 8) - 25x^2 + 4x + 54 = 25x^2 - 64 - 25x^2 + 4x + 54 = 4x - 10:$$

При $x = 20;3$ искомое значение равно $4 \cdot 20;3 - 10 = 71;2$.

Ответ: 71;2.

Пример 2. Найдите значение выражения $\frac{a - 7x}{a} : \frac{ax - 7x^2}{a^2}$ при $a = -6$, $x = 10$.

Решение.

Преобразуем выражение:

$$\frac{a - 7x}{a} : \frac{ax - 7x^2}{a^2} = \frac{a^2(a - 7x)}{ax(a - 7x)} = \frac{a}{x}.$$

При $a = -6$, $x = 10$

$$\frac{a}{x} = \frac{-6}{10} = -0,6.$$

Ответ: -0,6

Преобразование дробно-рациональных алгебраических выражений предполагает те же самые действия, что и преобразование целых алгебраических выражений, но к этим действиям добавляется приведение дробей к общему знаменателю и сокращение дробей.

Пример 3. Найдите значение выражения $\frac{a^{47} \cdot a^{-19}}{a^{29}}$ при $a = 0,08$.

Решение.

Воспользуемся свойствами степеней с одинаковым основанием:

$$\frac{a^{47} \cdot a^{-19}}{a^{29}} = a^{47+(-19)-29} = a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Поскольку $a = 0,08 = \frac{2}{25}$, искомое значение будет равно $1 : \frac{2}{25} = \frac{25}{2} = 12,5$.

Ответ: 12,5.

Пример 4. Найдите значение выражения $2b + \frac{5a - 2b^2}{b}$ при $a = 6, b = -60$.

Решение.

Приведём сумму к общему знаменателю:

$$2b + \frac{5a - 2b^2}{b} = \frac{2b^2 + 5a - 2b^2}{b} = \frac{5a}{b}.$$

При $a = 6, b = -60$

$$\frac{5a}{b} = \frac{5 \cdot 6}{-60} = -0,5.$$

Ответ: -0,5.

Пример 5. Найдите значение выражения $\frac{8}{x} - \frac{9}{5x}$ при $x = 0,4$.

Решение.

Приведём сумму дробей к общему знаменателю:

$$\frac{8}{x} - \frac{9}{5x} = \frac{5 \cdot 8 - 9}{5x} = \frac{31}{5x}.$$

При $x = 0,4$

$$\frac{31}{5x} = \frac{31}{5 \cdot 0,4} = 15,5.$$

Ответ: 15,5.

Пример 6. Найдите значение выражения $28ab + (2a - 7b)^2$ при $a = \sqrt{15}$, $b = \sqrt{8}$.

Решение.

Раскроем скобки по формуле квадрата разности:

$$28ab + (2a - 7b)^2 = 28ab + 4a^2 - 28ab + 49b^2 = 4a^2 + 49b^2.$$

При $a = \sqrt{15}$, $b = \sqrt{8}$

$$4a^2 + 49b^2 = 4(\sqrt{15})^2 + 49(\sqrt{8})^2 = 4 \cdot 15 + 49 \cdot 8 = 452.$$

Ответ: 452.

Пример 7. Найдите значение выражения $\frac{a^2 - 81}{2a^2 - 18a}$ при $a = 1,5$.

Решение.

Преобразуем выражение по формуле разности квадратов:

$$\frac{a^2 - 81}{2a^2 - 18a} = \frac{(a - 9)(a + 9)}{2a(a - 9)} = \frac{a + 9}{2a}.$$

При $a = 1,5$

$$\frac{a + 9}{2a} = \frac{1,5 + 9}{2 \cdot 1,5} = \frac{10,5}{3} = 3,5.$$

Ответ: 3,5.

Пример 8. Найдите значение выражения $\frac{7a}{3c} - \frac{49a^2 + 9c^2}{21ac} + \frac{3c - 49a}{7a}$ при $a = 78$, $c = 20$.

Решение.

Приведём сумму дробей к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \frac{7a}{3c} - \frac{49a^2 + 9c^2}{21ac} + \frac{3c - 49a}{7a} &= \frac{(7a)^2 - 49a^2 - 9c^2 + 3c(3c - 49a)}{21ac} = \\ &= \frac{49a^2 - 49a^2 - 9c^2 + 9c^2 - 147ac}{21ac} = \frac{-147ac}{21ac} = -7. \end{aligned}$$

Следовательно, данное выражение равно -7 при любых a и c .

Ответ: -7 .

Выполнить самостоятельно:

Найдите значение выражения $\frac{a^2 - 16}{5a^2 + 20a}$ при $a = 0,4$.

Найдите значение выражения $\frac{7}{x} - \frac{1}{5x}$ при $x = -0,8$.

Найдите значение выражения $\frac{1}{x} - \frac{x + y}{xy}$ при $x = \sqrt{32}$, $y = \frac{1}{5}$.